

Les incertitudes au lycée

Calcul des incertitudes composées au lycée

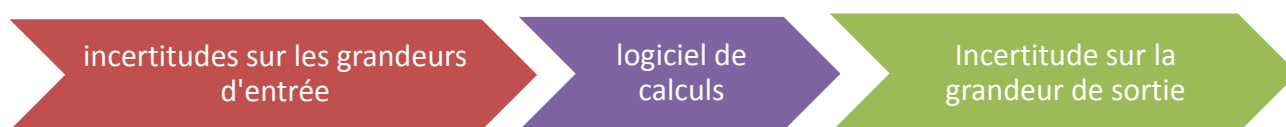
L'objectif est de réaliser le calcul d'incertitudes composées de manière **rapide, automatique et transparente pour les élèves**. En effet, au lycée, la priorité doit être donnée :

- à l'identification des sources d'erreurs et à l'évaluation des incertitudes associées ;
- à l'exploitation de l'incertitude finale.

Le vocabulaire utilisé doit aussi être adapté. On utilise ainsi avec les élèves le terme d'incertitude pour parler d'incertitude élargie.

Il est donc nécessaire de disposer de logiciels permettant de réaliser les calculs en respect avec toutes les règles, tout en ayant une interface compatible avec les contraintes pédagogiques indiquées ci-dessus.

C'est le cas avec l'application développée par Jean Marie BIAN SAN, professeur de physique au lycée Lapeyrouse d'Albi.



Elle comprend deux logiciels (un à destination du professeur et l'autre à destination des élèves), tous les deux téléchargeables gratuitement sur le site de l'auteur : http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html

Le présent document présente l'utilisation de cette application (le travail avec les élèves en deux étapes) et fournit des exemples d'utilisation.

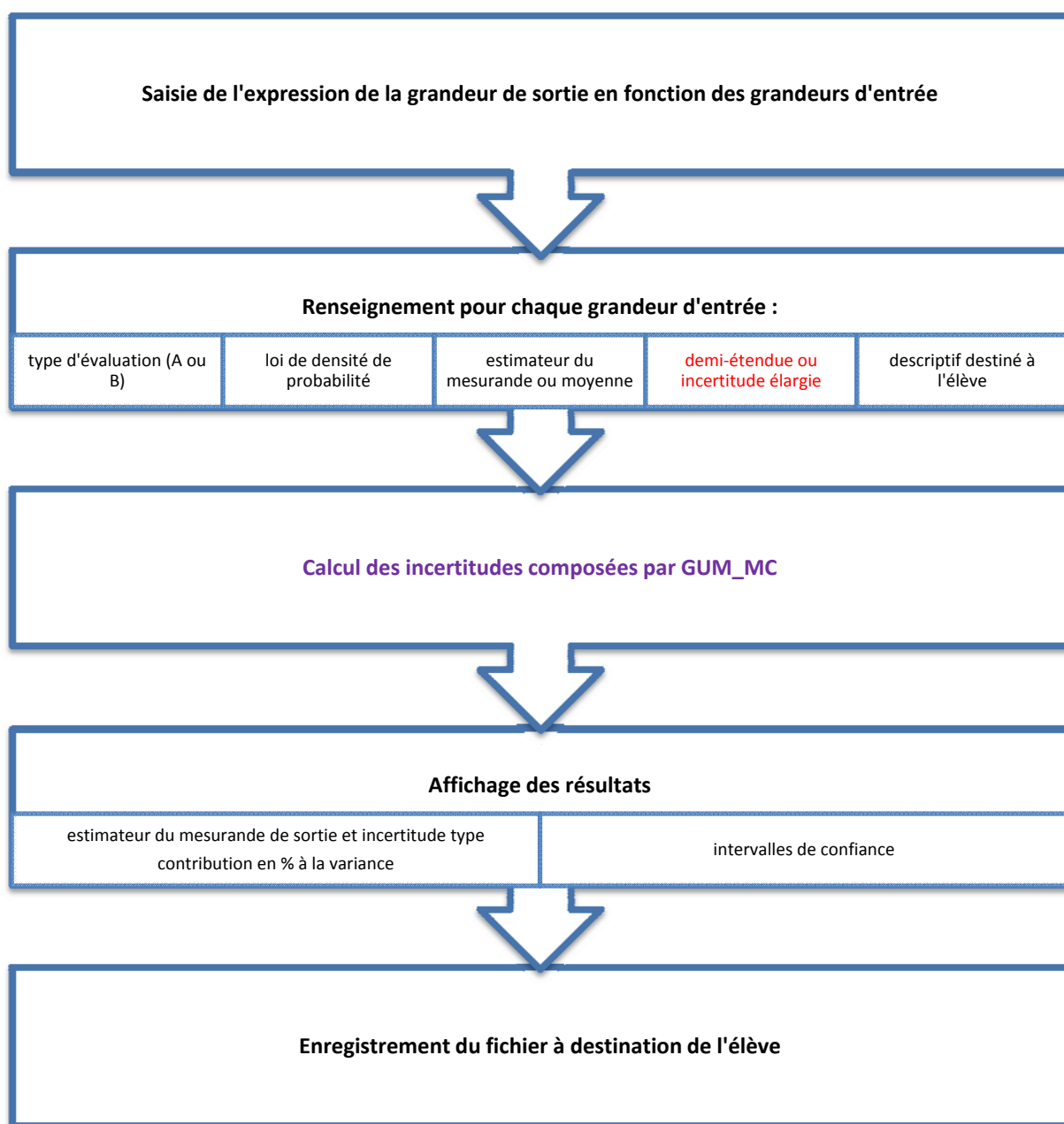
Le travail avec les élèves en deux étapes

Le professeur doit dans un premier temps préparer un fichier enregistrable, à destination de ses élèves, à l'aide du logiciel de calculs appelé GUM_MC. Cette étape ne prend que quelques minutes.

Les élèves utilisent le fichier du professeur à l'aide d'une version de ce logiciel qui leur est spécialement dédiée : GUM_MC_eleve_lycée. L'interface du logiciel est simple d'utilisation et ne pose pas de problème particulier aux élèves.

Préparation du fichier enregistrable par le professeur à l'aide du logiciel GUM_MC.

La préparation du fichier se fait en plusieurs étapes définies ci-dessous :

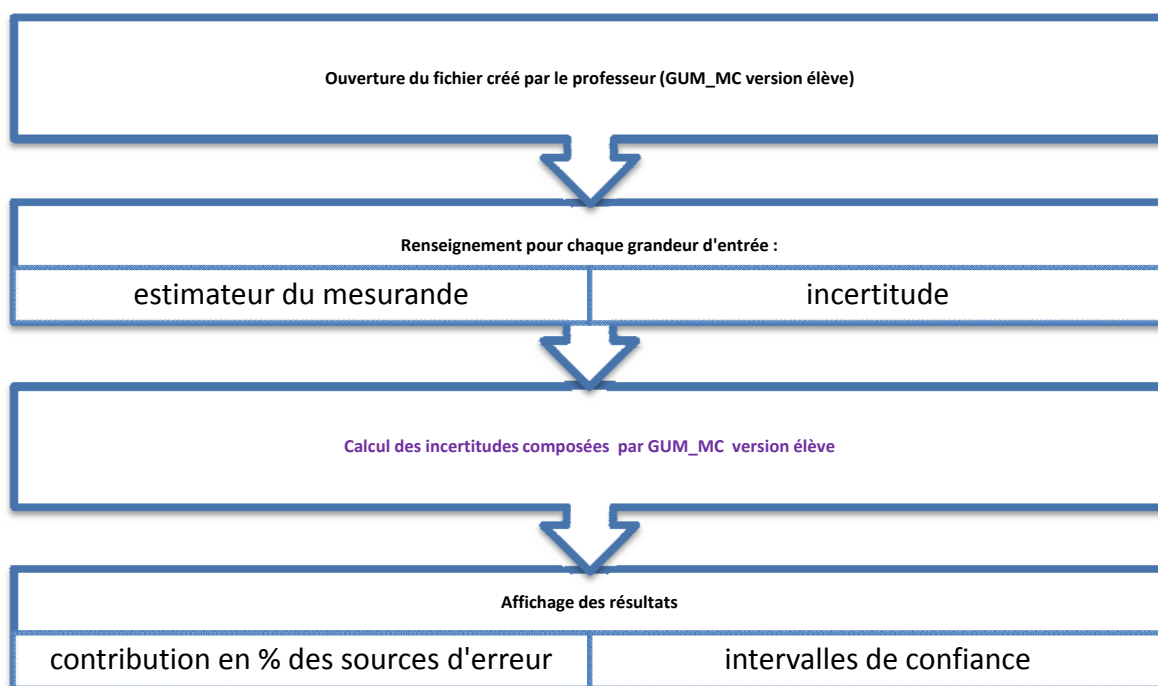


Remarques :

- La virgule décimale est le point « . »
- Il faut réaliser toutes les étapes précédentes pour générer le fichier et pour pouvoir l'enregistrer. Mais les valeurs saisies par le professeur n'apparaîtront pas dans le fichier ouvert par les élèves dans la version lycée.
- Pour chaque grandeur, il est possible de saisir l'incertitude-type ou la demi-étendue (dans le cas d'une distribution rectangulaire) ou l'incertitude élargie (dans le cas d'une loi normale). Mais le choix qui est fait par le professeur **conditionne** ce qui sera demandé dans la version élève. Si le professeur saisit une incertitude-type, l'élève devra aussi saisir une incertitude type. Autrement dit, comme les élèves ne connaissent que le terme « incertitude », **le professeur ne devra saisir que des demi-étendues (dans le cas de distributions rectangulaires) ou des incertitudes élargies associées à un taux de confiance (dans le cas de distributions normales)**. Le logiciel (version élève) calcule l'incertitude-type en fonction de la loi de probabilité choisie par le professeur pour chaque grandeur d'entrée, puis calcule l'incertitude-type composée et enfin l'incertitude élargie pour le taux de confiance choisi.
- Le descriptif destiné aux élèves permet de préciser la nature de la grandeur d'entrée ou d'en préciser les unités.
- Lorsque l'évaluation de l'incertitude sur la mesure d'une grandeur d'entrée nécessite à la fois une évaluation de type A et une évaluation de type B, il faut décomposer la grandeur correspondante en deux autres. L'incertitude sur l'une des deux grandeurs sera estimée par une évaluation de type A et l'autre par une évaluation de type B (voir l'exemple 4).

Utilisation du fichier par les élèves à l'aide de la version élève de GUM_MC

Les élèves doivent suivre les étapes suivantes.



Remarques :

- Lors de l'ouverture du fichier, les valeurs numériques du professeur n'apparaissent pas.
- Le choix du type d'évaluation (A ou B) est transparent pour les élèves. Mais en fonction du type d'évaluation, les fenêtres relatives aux grandeurs d'entrée seront différentes.

Évaluation de type A	Évaluation de type B
Moyennes des mesures: Ecart-type échantillonal: Nombre de mesures: Saisie ou modification des mesures OK Abandonner	Estimateur du mesurande: Incertitude: OK Abandonner

Pour une évaluation de type A, les élèves ont deux possibilités :

- soit ils calculent eux-mêmes la moyenne des valeurs mesurées et l'écart-type échantillonal de la série de mesures et renseignent les champs concernés ;
- soit ils saisissent directement leurs mesures.

Exemples

Dans les exemples qui suivent, les tableaux proposés intègrent les données que doit saisir le professeur pour préparer le fichier à destination des élèves.

Les résultats proposés à la suite sont des copies d'écran du logiciel GUM_MC_eleve_lycee (version élève).

Exemple 1 : Fabrication d'une solution de chlorure de sodium

Des élèves doivent préparer une solution de concentration 2 g.L^{-1} en introduisant une masse de soluté de 2g dans une fiole jaugée de 1 L. Le choix de la balance leur appartient (balance 1/100 ou 1/1000).

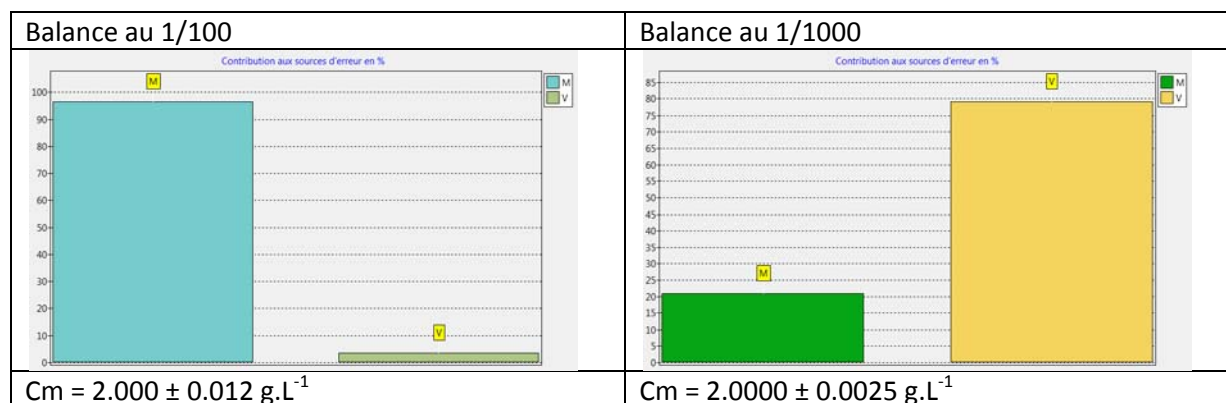
Seules les valeurs des champs orange sont saisies par les élèves.

La loi de distribution concernant le volume est normale car l'incertitude sur le volume est une incertitude composée (voir <http://ftp.ac-grenoble.fr/telphy/ts/incertitude/incertitude/chapitres/CHAPITRE%20VIII.pdf> pour plus de détails...).

Les demi-étendues pour les balances sont recherchées dans les notices du fabricant ($\Delta m = 0,01 \text{ g}$ ou $\Delta m = 0,001 \text{ g}$).

Expression grandeur de sortie $C_m = m/V$					
Grandeurs d'entrée					
Mesurande	Type évaluation	Loi de probabilité	Estimateur ou moyenne	Demi-étendue ou incertitude élargie	Descriptif
M	B	rectangulaire	2,000	0,001	Masse de soluté en g
			2,00	0,01	
V	B	normale	1,0000	0,001	Volume de la fiole jaugée en L

Résultats donnés par le logiciel selon le type de balance utilisée :



L'histogramme représentant la contribution aux sources d'erreur (en %) permet aux élèves d'analyser le choix qu'ils ont fait pour réaliser la dissolution.

On note que dans le premier cas, si l'on veut diminuer l'incertitude de la mesure il faut agir sur la mesure de la masse et que dans le second cas chaque contribution a un poids relatif voisin.

Exemple 2 : mesure de vitesse par effet Doppler

On mesure la vitesse d'un mobile à l'aide du principe Doppler. La vitesse est donnée par la relation :

$$v = \frac{c \times \Delta f}{2f_e}$$

c : célérité des ondes ultrasonores

Δf : différence de fréquence entre la fréquence de l'émetteur et celle du récepteur.

f_e : fréquence de l'émetteur

La différence de fréquence est obtenue à l'aide d'un montage multiplieur et passe-bas (voir [http://eduscol.education.fr/rnstl/spcl-sc.-physiques-chimiques-laboratoire/ondes/rechauffement climatique courants marins](http://eduscol.education.fr/rnstl/spcl-sc.-physiques-chimiques-laboratoire/ondes/rechauffement_climatique_courants_marins)).

La célérité des ondes ultrasonores dépend de la température suivant (c en m/s et T en °C) :

$$c = 331,7 + 0,607 \times T$$

La vitesse est donc :

$$v = \frac{(331,7 + 0,607 \times T) \times \Delta f}{2f_e}$$

Les erreurs de justesse des instruments de mesure sont recherchées dans les notices respectives. Les lois de distribution utilisées sont rectangulaires.

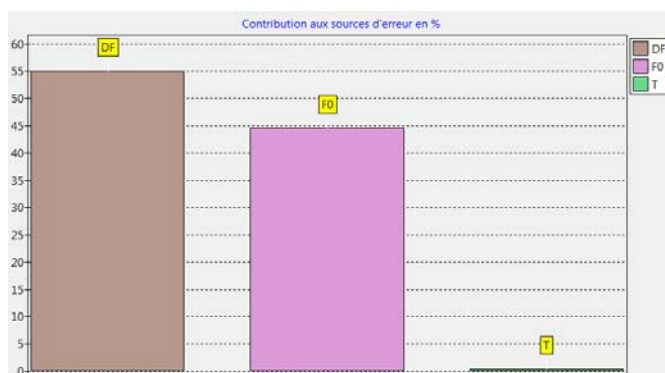
Pour la mesure de fréquence, l'erreur de justesse est **0,5% lecture + 2 UR** et pour la température elle est égale à **0,3°C**.

Expression grandeur de sortie $V = (331,7 + 0,607 \times T) \times \Delta f / 2f_e$					
Grandeurs d'entrée					
Mesurande	Type évaluation	Loi de probabilité	Estimateur ou moyenne	Demi-étendue ou incertitude élargie	Descriptif
Δf	B	rectangulaire	179,2	1,096	Différence de fréquence en Hz
f_e	B	rectangulaire	40000	220	Fréquence émetteur en Hz
T	B	rectangulaire	20	0,3	Température en °C

Résultats :

Les résultats donnés par le logiciel peuvent être copiés dans le presse-papier pour pouvoir être joints au compte rendu.

Taux de confiance	Incertitude élargie U	Intervalle [y-U ; y+U]	Écriture finale (1 chiffre sur incertitude)	Écriture finale (2 chiffres sur incertitude)
75%	0.00421 m/s	[0.76487 ; 0.77329]	(0.769 ± 0.005) m/s	(0.7691 ± 0.0043) m/s
95%	0.00717 m/s	[0.76191 ; 0.77625]	(0.769 ± 0.008) m/s	(0.7691 ± 0.0072) m/s
99%	0.00943 m/s	[0.75965 ; 0.77851]	(0.77 ± 0.01) m/s	(0.7691 ± 0.0095) m/s



Exemple 3 : Mesure du volume d'une goutte

Principe : on utilise une pipette jaugée de 1 mL de classe A et de tolérance $\pm 0,008$ mL. On note V_0 le volume de cette pipette.

On subdivise 18 fois de suite le contenu de la pipette en gouttes et on compte le nombre N de gouttes d'eau en opérant le plus soigneusement possible.

On a donc la relation de base suivante :

$$V_g = \frac{V_0}{N}$$

Il s'agit de déterminer le meilleur estimateur du volume V_g d'une goutte et d'évaluer l'incertitude sur la mesure effectuée.

Les données numériques proviennent de l'article de Jean-Christophe Hannachi, sur le thème « De la mesure de la taille d'une goutte à l'hétéroazéotrope eau/n-heptane » paru dans l'actualité chimique de février mars 2012.

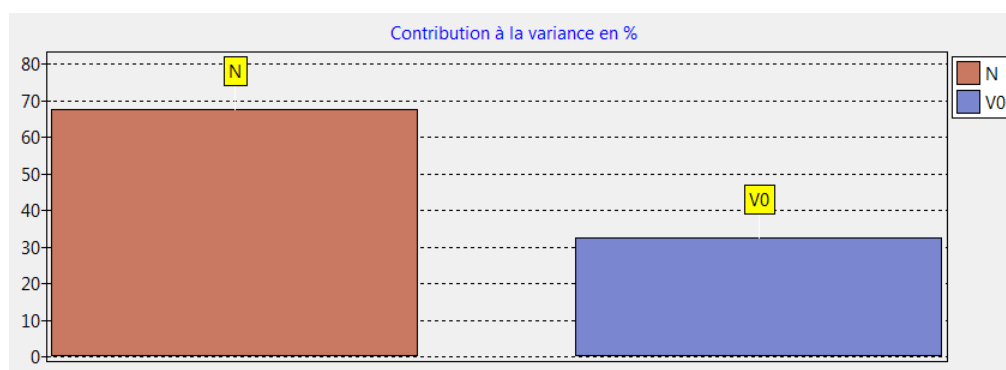
Cette situation expérimentale est une illustration de la notion de variabilité des résultats obtenus pour N ; les valeurs sont regroupées sur le tableau ci-dessous (18 mesures sont réalisées).

Gouttes	33	34	35	36
occurrences	2	4	7	5

L'incertitude-type sur le nombre de gouttes N est estimée par une approche statistique (évaluation de type A) alors que l'incertitude-type sur le volume est estimée par une approche probabiliste (évaluation de type B).

Expression grandeur de sortie $V_g = \frac{V_0}{N}$						
Grandeurs d'entrée						
Mesurande	Type évaluation	Loi de probabilité	Estimateur ou moyenne			Demi-étendue ou incertitude élargie
V_0	B	rectangulaire	1			0,008
N	A		33	35	36	
			35	34	33	
			34	36	35	
			35	35	34	
			36	35	36	
			34	36	35	
						Nombre de gouttes

Résultats :



Taux de confiance	Incertitude élargie U	Intervalle [y-U ; y+U]	Écriture finale (1 chiffre sur incertitude)	Écriture finale (2 chiffres sur incertitude)
75%	0.000268 mL	[0.028440 ; 0.028976]	(0.0287 ± 0.0003) mL	(0.02871 ± 0.00027) mL
95%	0.000456 mL	[0.028252 ; 0.029164]	(0.0287 ± 0.0005) mL	(0.02871 ± 0.00046) mL
99%	0.000600 mL	[0.028108 ; 0.029308]	(0.0287 ± 0.0006) mL	(0.02871 ± 0.00060) mL

En gardant un chiffre significatif, le résultat donne : $V_g = 28,7 \pm 0,5 \mu\text{L}$.

Exemple 4 : Étalonnage par pesée d'une solution d'hydroxyde de sodium

L'étalonnage par pesée de la solution aqueuse d'hydroxyde de sodium par l'hydrogénophthalate de potassium permet d'accéder à la concentration molaire C_{NaOH} par la relation :

$$C_{\text{NaOH}} = \frac{m \times 1000}{M \times V_E}$$

m : masse de solide étalon (g)

M : masse molaire du solide étalon ($M = 204,22 \text{ g.mol}^{-1}$)

V_E : volume équivalent (mL) du dosage

Pour les détails voir :

http://eduscol.education.fr/rnstl/mesure-instrumentation/mi_ressources/incertitudes_etalonnage

Les deux sources d'erreur sont les mesures de la masse m et du volume V_E . L'incertitude sur la masse molaire est négligeable.

L'incertitude sur le volume à l'équivalence V_E est la composition de l'incertitude de répétabilité (évaluation de type A) et l'incertitude sur la mesure de volume à l'aide de la burette (évaluation de type B).

Pour intégrer ces deux sources d'erreur dans GUM_MC, l'astuce consiste à écrire V_E sous la forme :

$$V_E = V_{\text{rep}} + V_{\text{bur}}$$

L'incertitude de répétabilité est évaluée par les élèves qui réalisent plusieurs dosages dans les conditions de répétabilité. La valeur de V_{rep} est la valeur moyenne des valeurs du volume à l'équivalence.

Dosage n°	V_E (mL)
1	10,50
2	10,10
3	10,10
4	10,20
5	10,1
6	10,1
7	10,1

L'écart-type expérimental de la série de mesures peut être calculé « manuellement » ou automatiquement par le logiciel (module de saisie disponible). Dans tous les cas le logiciel calculera l'incertitude type de la valeur moyenne (de manière transparente pour les élèves) pour la détermination de l'incertitude sur la concentration.

Il faut affecter à V_{bur} la valeur 0 (pour ne pas compter deux fois le volume à l'équivalence).

Expression grandeur de sortie					
$C_{\text{NaOH}} = \frac{m \times 1000}{204,22 \times (V_{\text{rep}} + V_{\text{bur}})}$					
Grandeurs d'entrée					
Mesurande	Type évaluation	Loi de probabilité	Estimateur ou moyenne	Demi-étendue ou incertitude élargie	Descriptif
m	B	rectangulaire	0,205	0,001	Masse en g
V _{bur}	B	normale	0	0,05	Volume en mL Affecter la valeur 0 à l'estimateur
V _{rep}	A		10,5		Volume à l'équivalence en mL
			10,1		
			10,1		
			10,2		
			10,1		
			10,1		
			10,1		

Résultats :

Taux de confiance	Incertitude élargie U	Intervalle [y-U ; y+U]	Écriture finale (1 chiffre sur incertitude)	Écriture finale (2 chiffres sur incertitude)
75%	0.000777 mol/L	[0.097913 ; 0.099468]	(0.0987 ± 0.0008) mol/L	(0.09869 ± 0.00078) mol/L
95%	0.00132 mol/L	[0.09737 ; 0.10001]	(0.099 ± 0.002) mol/L	(0.0987 ± 0.0014) mol/L
99%	0.00174 mol/L	[0.09695 ; 0.10043]	(0.099 ± 0.002) mol/L	(0.0987 ± 0.0018) mol/L

Remarque :

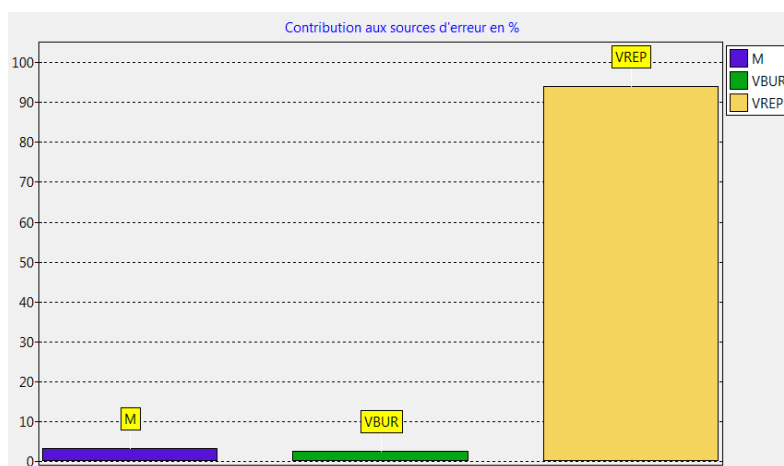
Si les élèves n'ont pas le temps d'évaluer l'incertitude de répétabilité, le professeur peut l'évaluer pour eux avant la séance de TP. Les élèves réalisent dans ce cas un dosage **unique**.

Par exemple, le professeur réalise une série de 7 dosages et détermine l'écart-type de la série de mesure de volume à l'équivalence. Il obtient : $(\sigma_{n-1})_n = 0,15 \text{ mL}$.

L'incertitude élargie est donc : $U_{\text{rep}}(V_E) = 2 \times (\sigma_{n-1})_n = 0,3 \text{ mL}$.

Expression grandeur de sortie					
$C_{\text{NaOH}} = \frac{m \times 1000}{204,22 \times (V_{\text{rep}} + V_{\text{bur}})}$					
Grandeurs d'entrée					
Mesurande	Type évaluation	Loi de probabilité	Estimateur ou moyenne	Demi-étendue ou incertitude élargie	Descriptif
m	B	rectangulaire	0,400 g	0,001	Masse en g
V _{bur}	B	normale	0	0,05	Volume à l'équivalence en mL. Affecter la valeur 0 à l'estimateur
V _{rep}	B		20,05	0,3	Volume en mL

Résultats :



L'incertitude de répétabilité impacte fortement l'incertitude de concentration de soude.

Taux de confiance	Incertitude élargie U	Intervalle [y-U ; y+U]	Écriture finale (1 chiffre sur incertitude)	Écriture finale (2 chiffres sur incertitude)
75%	0.000885 g/mol	[0.096805 ; 0.098574]	(0.0977 ± 0.0009) g/mol	(0.09769 ± 0.00089) g/mol
95%	0.00151 g/mol	[0.09618 ; 0.09920]	(0.098 ± 0.002) g/mol	(0.0977 ± 0.0016) g/mol
99%	0.00198 g/mol	[0.09571 ; 0.09967]	(0.098 ± 0.002) g/mol	(0.0977 ± 0.0020) g/mol