Transferts thermiques : comment modéliser l'évolution de la température d'un solide ?

Problématique :

Chacun sait qu'il vaut mieux éviter de laisser la cuillère dans une casserole lorsque l'on prépare une sauce, un potage ou de la confiture ! Cependant, on peut, sans risque de se brûler, utiliser une cuillère sortie du tiroir, mais pour combien de temps ? Et si vous aviez le choix, prendriez-vous la vieille cuillère en argent de la grand-mère ou un autre matériau ?

Pour simplifier le problème on supposera que la cuillère est faite dans un matériau homogène, et que sa température est la même en chacun de ses points. Avec la vieille cuillère en argent, un matériau bien conducteur, nous sommes assez proche de cette situation. Nous supposerons également que le liquide a atteint sa température maximale, qui se situe le plus souvent aux environs de 100°C. L'introduction de la cuillère ne modifiera pas la température du liquide, celle si sera supposée constante tout au long de l'expérience, comme dans un « thermostat ».

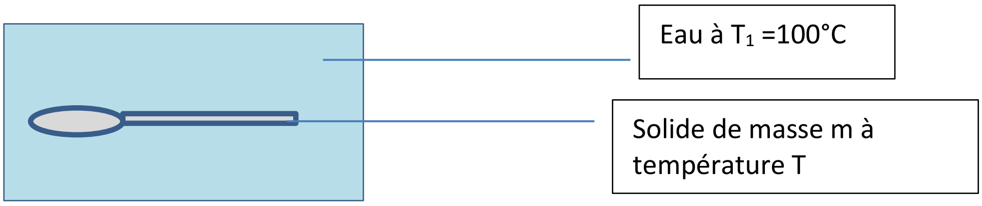
On prendra appui sur la loi suivante :

Loi dite « phénoménologique » de Newton
Une loi phénoménologique est basée sur la description des phénomènes.
Les transferts thermiques entre un corps et le milieu extérieur suivent la loi de Newton si la puissance thermique (ou flux) est proportionnelle d'une part à la surface d'échange et d'autre part à l'écart de température entre le matériau (et plus précisément sa surface) et l'extérieur.
Rq : il est difficile d'obtenir une valeur précise du coefficient de proportionnalité, noté souvent *h*, et appelé coefficient de transfert de Newton, car il dépend fortement du milieu (nature, mouvement du liquide, température …).

Travail à réaliser :
Faire un schéma de la situation, en définissant les grandeurs utiles.
Exprimer, selon la loi de Newton, la puissance thermique surfacique échangée avec la cuillère en précisant le sens du transfert.
Appliquer la loi de conservation de l'énergie pour la cuillère, dans une situation idéalisée, sans perte.
Déterminer l'équation différentielle à résoudre.
Déterminer l'ordre de grandeur du temps caractéristique.
Proposer une analogie avec la charge d'un condensateur à l'aide d'un tableau.

Données :
Masse de la cuillère en argent : 70 g
Surface de la cuillère : $S = 90\ \text{cm}^2$
Capacité thermique massique de l'argent : $235\ \text{J}\cdot\text{Kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Valeurs approximatives des coefficients de Newton pour un transfert conducto-convectif dans l'eau chaude : $h = 3000\ \text{W.m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, et dans l'air : $h = 10\ \text{W.m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
avec $P = h\cdot S\cdot(T_{ext} - T)$

Schématisons la situation :



Considérons le système « cuillère » pour faire le bilan d'énergie :
La cuillère reçoit de l'énergie de la part de l'eau, cette énergie contribue à augmenter sa température
Expression de la puissance apportée à la cuillère est donc positive :
$P = h \cdot S \cdot \Delta T = h \cdot S(T_1 - T)$
On cherche à déterminer l'expression de la température en fonction du temps : $T(t)$
Le transfert thermique (que l'on peut écrire dQ) correspondant à un petit intervalle de temps dt permet d'augmenter la température de dT donc
$dQ = m \cdot c\,(T\,(t + dt) - T)$ avec $P = \frac{dQ}{dt} = h \cdot S(T_1 - T)$
Or, plus rigoureusement , quand dt temps vers 0, $\lim_{dt \to 0} \frac{T(t+dt)-T(t)}{dt} = \frac{dT}{dt}$ correspond bien à la dérivée de la fonction recherchée : $T(t)$
Soit $m \cdot c \frac{dT}{dt} = h \cdot S(T_1 - T)$
Ce qui correspond à une équation différentielle du premier ordre : $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$ avec $k = \frac{h \cdot S}{m \cdot c}$
Où l'on vérifie que la température d'équilibre , lorsque $\frac{dT}{dt}$ est nulle, est bien égale à T_1 la température extérieure.
En tenant compte de l'état initial où le solide est à température ambiante T_0
On obtient $T(t) = (T_0 - T_1)e^{-kt} + T_1$
Le temps caractéristique τ est de $\frac{1}{k}$
AN : $\tau = \frac{m \cdot c}{S \cdot h}$ soit $\tau = \frac{0{,}07 \times 235}{90 \times 10^{-4} \times 3000}$

On obtient une valeur d'environ 0,6 s, ce qui est peu pour avoir le temps de bien lier une sauce ou de faire ses confitures !

Rq : On peut aussi déterminer ce temps caractéristique simplement grâce aux unités des grandeurs du problème.

Quel autre matériau pourrions-nous choisir et pourquoi ?
Il faut choisir une masse plus importante, ou un matériau dont la capacité thermique est plus grande, utiliser des matériaux peu conducteurs comme typiquement le bois qui possède toutes les qualités, mais d'autres solutions sont possibles allonger le manche de la cuillère et alterner les matériaux. Ici, pour simplifier, toute la cuillère a été immergée mais à vous d'imaginer d'autres solutions pour éviter de se bruler les doigts…

L'analogie avec le circuit RC est possible, car finalement l'équation différentielle est bien du même ordre. Le condensateur est soumis à une tension constante de la part du générateur, et l'objet est soumis à une température externe constante. Pour le condensateur, le courant « traverse » une résistance, pour l'objet les échanges se font à travers « la paroi » de cet objet.

Analysons à travers un tableau les parallèles que l'on peut effectuer :

Analogie avec un circuit RC

Système	Le solide	Le condensateur	
Grandeur dont on cherche l'évolution	La température du solide T	La tension aux bornes du condensateur Uc	
Lois de conservation pour le système	Conservation de l'énergie : la puissance thermique échangée contribue faire varier l'énergie interne du solide $P = dQ/dt$	Conservation de la charge : Le courant entrant dans le condensateur contribue à faire varier la charge q du condensateur $i = dq/dt$	C'est là la faiblesse de cette analogie car la puissance débitée par le générateur est $E.i$
	Energie interne Q	La charge q	
Contrainte externe	Milieu extérieur thermostat Tex	Générateur de fem constante E	
Grandeurs caractéristiques du système	Capacité thermique C	Capacité du condensateur C	
	$P = C\, dT/dt$	$i = C.dU_c/dt$	
Lois qui traduit la nature des échanges	Loi de Newton $P = hS(T_{ext}-T)$	loi des tensions $E= Ri + U_c$ $i = 1/R(E-U_c)$	
Constante de temps	C/hS	$R.C$	